Thomas Vasques Melo

01/09/24

Questão 1:

Para determinarmos os elementos da elipse, vamos rotacioná-la: Sabemos que se $a = c$, $\theta = 45°$. Entretanto, vamos calcular para determinarmos a' e c':

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 \\ 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (7-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$49 - 14\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 14\lambda + 48 = 0$$

$$\Delta = (14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48 = 196 - 192 = 4$$

$$\lambda = \frac{14 \pm \sqrt{4}}{2} \therefore \lambda = \frac{14 \pm 2}{2} \therefore \lambda_1 = \frac{14-2}{2} \therefore \lambda_1 = 12/2 \therefore \lambda_1 = 6$$
$$\lambda_2 = \frac{14+2}{2} \therefore \lambda_2 = 16/2 \therefore \lambda_2 = 8$$

Podemos escolher qualquer λ para a' e c', então consideremos $a' = 8$ e $c' = 6$. Sendo assim:

$$tg(2\theta) = \frac{b}{a-c} \therefore tg(2\theta) = \frac{b}{7-7} \therefore tg(2\theta) = \frac{b}{0} \rightarrow \text{inexistente!}$$

Sendo assim, $2\theta = 90°$ e $\theta = 45°$.

Agora descobriremos d' e e'. $F' = F = -36$

	d'	e'
d	$\cos\theta$	$-\sin\theta$
e	$\sin\theta$	$\cos\theta$

$\therefore$

	d'	e'
12	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
-12	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

$\therefore$ $d' = 12 \cdot \sqrt{2}/2 - 12 \cdot \sqrt{2}/2$
$e' = -12 \cdot \sqrt{2}/2 - 12\sqrt{2}/2$

$d' = 0$

$e' = -\frac{24\sqrt{2}}{2} = -12\sqrt{2}$

Com essas informações, podemos construir uma nova equação sem termo misto:

spiral

01/09/24

$E: 8x^2 + 6y^2 - 12\sqrt{2}y - 36 = 0 \quad :2 \quad \Leftrightarrow$

$4x^2 + 3y^2 - 6\sqrt{2}y - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$4x^2 + 3y^2 - 6\sqrt{2}y + \sqrt{6}^2 = 18 + \sqrt{6}^2 \quad \Leftrightarrow$

$4x^2 + 3y^2 - 6\sqrt{2}y + 6 = 24 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{4x^2 + 3y^2 - 6\sqrt{2}y + 6}{24} = \frac{24}{24} \quad \Leftrightarrow$

$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2 - 2\sqrt{2}y + 2}{8} = 1 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{x^2}{6} + \frac{(y - \sqrt{2})^2}{8} = 1$

Completando quadrado:
$(\sqrt{3}y - z)^2 = 3y^2 - 2\sqrt{3}yz + z^2$

$2\sqrt{3}yz = 6\sqrt{2}y \quad \Leftrightarrow$

$z = \sqrt{6}$

Dessa forma, concluímos que $a^2 = 8$ e $b^2 = 6$. Sendo assim, $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e $b = \sqrt{6}$. Para descobrir c:

$a^2 = b^2 + c^2 \therefore \sqrt{8}^2 = \sqrt{6}^2 + c^2 \therefore 8 = 6 + c^2 \therefore c = \sqrt{2}$

Portanto:

$F_1 = (0, \sqrt{2})$, $F_2 = (0, -\sqrt{2})$

$V_1 = (0, 2\sqrt{2})$, $V_2 = (0, -2\sqrt{2})$, $V_3 = (\sqrt{6}, 0)$, $V_4 = (-\sqrt{6}, 0)$

eixo maior $= 2a = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

eixo menor $= 2b = 2\sqrt{6}$

distância focal $= 2c = 2\sqrt{2}$

excentricidade $= \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

□

spiral

Thomas Vasques Melo

31/08/24

Questão 2:

Para determinar a equação da parábola, usaremos seu conceito: igualaremos as distâncias de um ponto $P=(x,y)$ à reta e ao foco. Sendo o foco na origem, $F=(0,0)$. Dessa forma:

$$\frac{|1\cdot x+\sqrt{3}y+3|}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}} = \sqrt{(0-x)^2+(0-y)^2} \iff \frac{|x+\sqrt{3}y+3|}{\sqrt{4}} = \sqrt{x^2+y^2} \iff$$

$$\frac{|x+\sqrt{3}y+3|}{2} = \sqrt{x^2+y^2} \iff (|x+\sqrt{3}y+3|)^2 = (2\sqrt{x^2+y^2})^2 \iff$$

$$x^2+2\sqrt{3}xy+6x+3y^2+6\sqrt{3}y+9 = 4(x^2+y^2) \iff$$

$$x^2+2\sqrt{3}xy+6x+3y^2+6\sqrt{3}y+9 = 4x^2+4y^2 \iff$$

$$2\sqrt{3}xy+6x+6\sqrt{3}y+9 = 3x^2+y^2 \iff 3x^2-6x-2\sqrt{3}xy+y^2-6\sqrt{3}y-9=0 \quad \square$$

Thomas Vasques Melo

01/09/24

Questão 3:

Para determinar o centro $C = (h, k)$, vamos igualar as assíntotas.

$2x + y - 3 = 2x - y - 1 \iff y - 3 = -y - 1 \iff 2y = -1 + 3 \iff y = 2/2 \iff y = 1$

$2x + 1 = 3 \iff 2x = 3 - 1 \iff 2x = 2 \iff x = 1$

Assim, $C = (1, 1)$.

A partir da distância do centro ao vértice, descobriremos a:

$d(V, C) = \sqrt{(1-1)^2 + (3-1)^2} \therefore \sqrt{0^2 + 2^2} = a \therefore a = \sqrt{4} \therefore a = 2$

Sendo um vértice $(1, 3)$, concluímos que o eixo real está sobre o eixo y. Sendo assim, pela declividade, determinaremos b:

$m = \pm \frac{a}{b} \therefore 2 = \pm \frac{a}{b} \therefore b = \pm 1$

como $2b$ é comprimento, $b \geq 0$ $\rightarrow b = 1$

Logo, $b^2 = 1$. Dessa forma, calcularemos c:

$c = \sqrt{2^2 + 1^2} \therefore c = \sqrt{5}$

Assim, achamos a equação da hipérbole:

$* \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \therefore \frac{(y-1)^2}{2^2} - \frac{(x-1)^2}{1} = 1 \therefore$

H: $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{1} = 1$

Com essas informações, determinamos:

$F_1 = (h, k+c) = (1, 1+\sqrt{5})$; $F_2 = (h, k-c) = (1, 1-\sqrt{5})$;

$V_2 = (h, k-a) = (1, 1-2) = (1, -1)$; $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

□

Thomas Vasques Milo

01/09/24

Questão 4:

Convertendo para coordenadas cartesianas:

$$T: (\cos\beta)x + (\operatorname{sen}\beta)y + d = 0$$

$$P\begin{cases} x = s\cos\alpha \\ y = s\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

Aplicando a fórmula de distância:

$$d(T,P) = \frac{|\cos\beta \cdot s\cdot\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\cdot s\cdot\operatorname{sen}\alpha + d|}{\sqrt{\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta}} \iff$$

$$d(T,P) = \frac{|s(\cos\beta\cdot\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\cdot\operatorname{sen}\alpha) + d|}{\sqrt{1}} \iff$$

$$d(T,P) = |s\underbrace{(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta)}_{\cos(\alpha-\beta)} + d| \iff$$

$$d(T,P) = |s\cdot\cos(\alpha-\beta) + d|$$

□